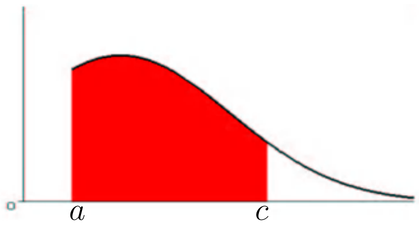
Argomento 10
Integrali impropri

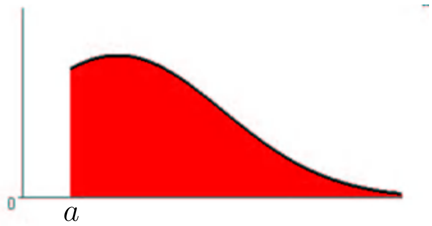
Premessa

Nell'Arg. 9 è stata introdotta la nozione di integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ per funzioni continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una deroga alla continuità di f è anche stata introdotta, ma solo per considerare funzioni con un numero finito di punti di discontinuità di I specie. Così, la limitatezza della funzione integranda f ed il fatto che l'intervallo di integrazione $[a,b]$ fosse chiuso e limitato non sono mai stati messi in discussione. In questo capitolo ci occupiamo di estendere il concetto di integrale ad alcune situazioni in cui l'intervallo di integrazione e/o la funzione integranda non sono limitati.

I. Intervalli illimitati

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $c \geq a$ la funzione f è continua in $[a,c]$: quindi possiamo calcolare l'integrale definito $\int_a^c f(x)\,dx$.





Vogliamo esaminare cosa accade a questi valori quando $c \to +\infty$, cioè studiare il $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$.[1]

Definizione 10.1 Sia f continua in $[a, +\infty)$; il limite

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx \ , \qquad (\blacklozenge)$$

se esiste, si chiama **integrale improprio di f in** $[a, +\infty)$, e si indica con il simbolo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Più in particolare, diciamo che l'integrale improprio è **convergente**, e che f è **integrabile in senso improprio** in $[a, +\infty)$, se il limite $(\blacklozenge)$ è finito.
Se invece $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty$ (oppure $-\infty$) l'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ è detto **divergente**.

Quindi

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \text{quando il limite esiste.}}$$

Se $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ **non esiste**. [2]

[1]Abbiamo già incontrato l'espressione $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ nell'Arg.9, con il nome di funzione integrale di f. Chiaramente, per $c \to +\infty$, la funzione F può convergere, divergere o non ammettere limite.

[2]Se la funzione f è sempre ≥ 0 (oppure sempre ≤ 0) ogni integrale improprio può essere convergente oppure divergente a $+\infty$ $(-\infty)$, ma comunque esiste.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 10.2 Sia $f(x) = e^{-x}$ per $x \in [2, +\infty)$. Allora

$$\int_2^c e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_2^c = e^{-2} - e^{-c}$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_2^c e^{-x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left(e^{-2} - e^{-c}\right) = e^{-2}.$$

Dunque f è integrabile in senso improprio in $[2, +\infty)$ e l'integrale improprio vale e^{-2}.

Esempio 10.3 Sia $f(x) = 1$ per $x \in [5, +\infty)$. Allora $\int_5^c f(x)\, dx = c - 5$ e quindi

$$\lim_{c\to+\infty} \int_5^c f(x)\, dx = \lim_{c\to+\infty} (c - 5) = +\infty.$$

Dunque f non è integrabile in senso improprio in $[5, +\infty)$ e l'integrale improprio è divergente.

Esempio 10.4 Sia $f(x) = \cos x$ per $x \in [\pi, +\infty)$. Allora $\int_\pi^c \cos x\, dx = [\sin x]_\pi^c = \sin c$ e quindi

$$\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \cos x\, dx = \lim_{c\to+\infty} \sin c \qquad \text{non esiste.}$$

Dunque f non è integrabile in senso improprio in $[\pi, +\infty)$ e l'integrale improprio non esiste.

Esempio 10.5

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1.$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} [\log x]_1^c = \lim_{c\to+\infty} (\log c) = +\infty.$

Osservazione 10.6 Se $a < b < c$, l'additività dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione (vd. Arg.9, formula ♣) garantisce che

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx\ ,$$

e poichè $\int_a^b f(x)\, dx$ è un numero deduciamo, studiando il limite per $c \to +\infty$, che f è integrabile (in senso improprio) in $[a, +\infty)$ se e solo se lo è in $[b, +\infty)$. Quindi, l'esistenza e la convergenza di $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ dipendono solo dal comportamento di f per valori "molto grandi" di x, cioè dalla natura di f in un intorno di $+\infty$.

II. Intervalli limitati

Ora consideriamo il caso di una funzione $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo limitato, ma non chiuso, $(a, b]$. Per $x \to a^+$ varie cose possono accadere.

- Se f ha limite finito L per $x \to a^+$ (ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $(0, 1]$) f è prolungabile con continuità in $x = a$ definendo $f(a) = L$. La funzione così ottenuta è continua in $[a, b]$ e si ricade nella situazione degli integrali definiti.
- Se f rimane limitata in $(a, b]$ (ad esempio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $(0, 1]$) si può estendere la definizione di integrale definito (non ce ne occupiamo qui).
- Se f è continua in $(a, b]$, ma non limitata in un intorno destro di a (ad esempio se ha asintoto verticale $x = a$) diamo la seguente la seguente:

Definizione 10.7 Sia f continua in $(a, b]$; il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx \,, \tag{$\blacklozenge\blacklozenge$}$$

se esiste, si chiama **integrale improprio di f in** $(a, b]$, e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Più in particolare, diciamo che l'integrale improprio è **convergente**, e che f è **integrabile in senso improprio** in $(a, b]$, se il limite ($\blacklozenge\blacklozenge$) è finito.

Se invece $\lim\limits_{c \to a^+} \displaystyle\int_c^b f(x)\, dx = +\infty$ (oppure $-\infty$) l'integrale improprio di f in $(a, b]$ è detto **divergente**.

Quindi

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx, \qquad \text{quando il limite esiste.}}$$

Se $\lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f in $(a, b]$ **non esiste**. [3]

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 10.8

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0^+} [\log x]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (-\log c) = +\infty.$

Quindi la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$ e l'integrale improprio vale 2; mentre la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$ e l'integrale improprio diverge.

Osservazione 10.9 Analogamente a quanto detto nell'Osservazione 10.6, è solo il comportamento di f "vicino" al punto $x = a$ (cioè in un suo intorno destro) ad influenzare l'esistenza, e la convergenza, di $\int_a^b f(x)\, dx$.

[3] Anche in questo caso, se la funzione f è sempre ≥ 0 (oppure sempre ≤ 0) ogni integrale improprio può essere convergente oppure divergente a $+\infty$ $(-\infty)$, ma comunque esiste.

III. Caso generale

Le precedenti definizioni possono facilmente essere estese ai casi in cui la funzione è continua in un intervallo del tipo $(-\infty, a]$, oppure del tipo $[a, b)$ e non è limitata in un intorno sinistro di b (ad esempio se l'asintoto verticale è $x = b$).
Se invece il dominio sul quale si vuole integrare la funzione f è unione di un numero finito di intervalli del tipo considerato nelle Definizioni 10.1 e 10.7, l'integrale improprio su questo dominio è detto convergente se e solo se lo è in ognuno di essi, ed il suo valore è la somma dei valori sui vari intervalli.

Esempio 10.10 La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è definita e continua nell'insieme $[-1, 0) \cup (0, 2]$, e non è limitata per $x \to 0$. Gli integrali impropri $\int_{-1}^{0} f(x)\ dx$ e $\int_{0}^{2} f(x)\ dx$ sono entrambi convergenti. Infatti

$$\int_{-1}^{0} f(x)\ dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \lim_{c\to 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{2/3}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0^-} \frac{3}{2}\left(c^{2/3} - 1\right) = -\frac{3}{2}$$

e, analogamente,

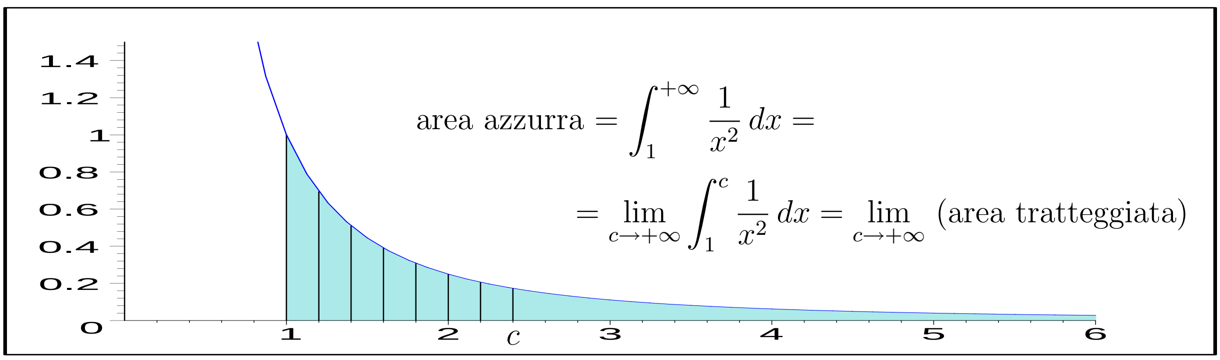
$$\int_{0}^{2} f(x)\ dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\ .$$

Perciò, l'integrale improprio $\int_{-1}^{2} f(x)\ dx$ converge, e vale $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

Ulteriori chiarimenti relativi a questo caso generale si possono trovare nell'Esempio 10.19.

Interpretazione geometrica

Dalla teoria dell'integrale definito sappiamo che, se f è continua e positiva in $[a, b]$, il numero $\int_a^b f(x)\, dx$ rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse x, il grafico di f e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$. Tale regione è sicuramente limitata (cioè racchiudibile in un opportuno cerchio centrato nell'origine) e di conseguenza ha area finita.
Anche agli integrali impropri di funzioni positive è associabile la nozione di area di una regione.
Nel caso della Definizione 10.1, con f positiva, la regione a destra della retta $x = a$ e compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse non è limitata. Diciamo che questa regione ha **area finita** se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, e ha **area infinita** se questo integrale diverge.
In questo modo l'area della regione considerata (ossia l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$) viene vista come il limite, per $c \to +\infty$, delle aree delle regioni comprese tra l'asse x, il grafico di f e le due rette verticali $x = a$ e $x = c$ (ossia $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx$).



L'Esempio 10.5 si interpreta dicendo che la regione a destra della retta verticale $x = 1$ e compresa fra il grafico di $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e l'asse x ha area finita di valore 1, anche se la regione è chiaramente illimitata.

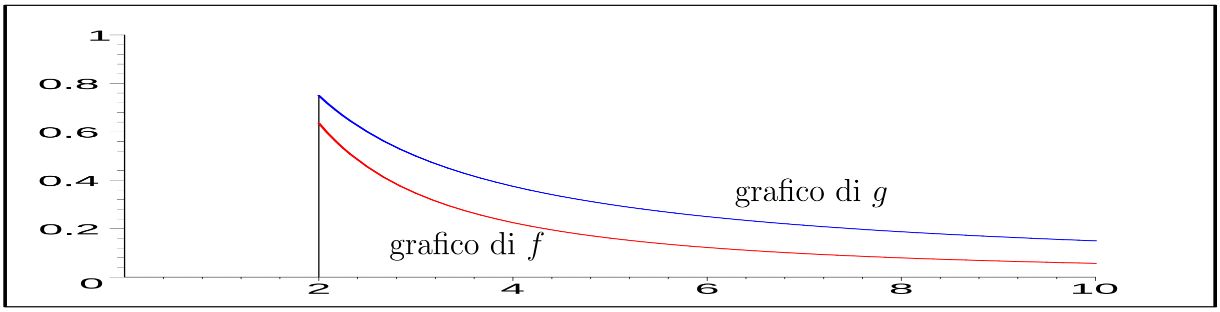
Un discorso analogo si può fare nel caso della Definizione 10.7. L'Esempio 10.8 mostra che la regione compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$, il semiasse positivo delle y (che è l'asintoto verticale), l'asse orizzontale e la retta verticale $x = 1$ ha area infinita.

Il teorema del confronto

Può accadere che sia molto difficile determinare, direttamente attraverso la definizione, l'esistenza o meno di un integrale improprio di una funzione f, perché questo comporta il calcolo esplicito di una sua primitiva. In tal caso, per stabilire se un integrale improprio è convergente o divergente, possono essere utili il seguente teorema e le sue conseguenze.

Teorema 10.11
Siano f e g continue e positive in $[a, +\infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$.
Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, allora diverge anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora converge anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Analoghi enunciati valgono per integrali impropri su intervalli del tipo: $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a]$.
L'interpretazione geometrica è immediata (vedi figura):
- se l'area sottesa alla funzione f è infinita, lo è a maggior ragione quella sottesa alla g;
- se l'area sottesa alla funzione g è finita, lo è a maggior ragione quella sottesa alla f.



Esempio 10.12 Sia $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2 + x^2}$. Allora posto $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e inoltre

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{c \to +\infty} [\arctan x]_0^c = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

Quindi anche $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{2 + x^2}\,dx$ è convergente.

Esempio 10.13 Per $x \to +\infty$, e^{-x^2} è infinitesima di ordine superiore ad ogni potenza (negativa) di x, quindi per ogni x abbastanza grande vale sicuramente: $0 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^2}$.

Dall'Es. 10.5 sappiamo che l'integrale improprio di $\dfrac{1}{x^2}$ in un intorno di $+\infty$ (ossia in ogni intervallo della forma $[a, +\infty)$, $a > 0$) è convergente. Quindi anche quello di e^{-x^2} lo è.

Osserviamo che nell'esempio precedente una primitiva di e^{-x^2} non può essere calcolata esplicitamente in termini finiti e quindi non si può applicare in modo diretto la definizione di integrale improprio.

Esempio 10.14 Poiché $\quad 0 < \log x < x, \quad \forall x > 1 \quad$ allora $\quad \dfrac{1}{\log x} > \dfrac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 1$

Dall'Es. 10.5 sappiamo che l'integrale improprio di $\dfrac{1}{x}$ in un intorno di $+\infty$ è divergente. Quindi anche quello di $\dfrac{1}{\log x}$ lo è.

Nelle applicazioni può essere talvolta utile applicare il seguente

Corollario 10.15 (Criterio del confronto asintotico)
Siano f e g due funzioni positive e continue in $[a, +\infty)$ e, per $x \to +\infty$, si abbia $f(x) \sim g(x)$. Allora gli integrali impropri in $[a, +\infty)$ delle funzioni f e g hanno lo stesso tipo di comportamento: convergono entrambi, o divergono entrambi.

Il risultato precedente vale anche per integrali impropri su intervalli del tipo $(a, b]$ se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$; e, in maniera analoga, per integrali impropri su intervalli della forma $[a, b)$, $(-\infty, a]$.

Esempio 10.16 L'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx \qquad \text{è convergente.}$$

Infatti, per $x \to 0^+$ si ha $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x}+x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; inoltre l'integrale improprio di $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in un intorno destro di 0 è convergente (vedi Es. 10.8), quindi è convergente anche l'integrale considerato.

Esempio 10.17 Sia

$$f(x) = \frac{e^{-x} + \arctan x}{(x-1)^2}.$$

Determiniamo il comportamento degli integrali impropri

$$1)\quad \int_4^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad 2)\quad \int_1^7 f(x)\,dx.$$

La funzione f è definita e continua in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e non si mantiene limitata in un intorno destro (anche sinistro) di 1.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^2}$; l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,dx$ è convergente (vedi Es. 10.5) e quindi anche l'integrale improprio 1) è convergente.

Per $x \to 1^+$, $f(x) \sim \dfrac{\frac{1}{e} + \frac{\pi}{4}}{(x-1)^2}$; inoltre poichè

$$\int_1^7 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{c \to 1^+} \int_c^7 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{c \to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_c^7 = \lim_{c \to 1^+} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{c-1}\right) = +\infty$$

anche l'integrale improprio 2) è divergente.

Funzioni "test"

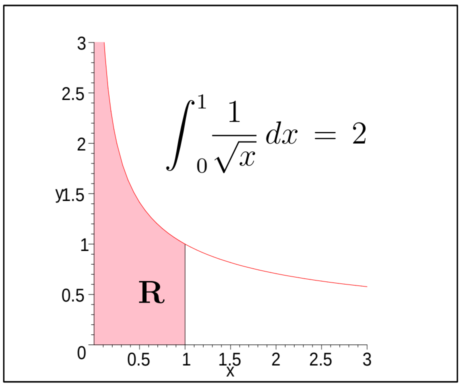
Il teorema del confronto è comodo da applicare se conosciamo il carattere dell'integrale improprio di una famiglia di funzioni "semplici" con le quali confrontare funzioni più complicate, come abbiamo già fatto negli Esempi 10.12, 10.13, 10.14, 10.16 e 10.17. Tra le più comode funzioni test con cui confrontare l'assegnata funzione vi sono le potenze. Nelle seguenti tabelle sono riassunti i comportamenti degli integrali impropri delle potenze.

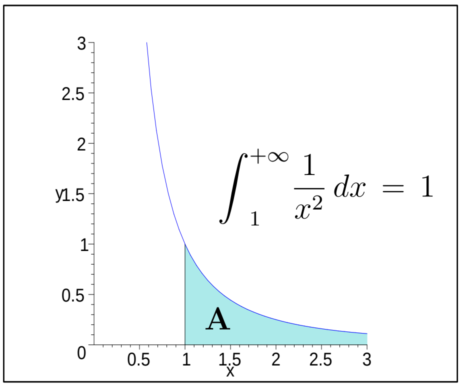
$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \textit{per} \quad \alpha \geq 1 \quad (\textit{diverge}) \\[2ex] \dfrac{1}{1-\alpha} & \textit{per} \quad \alpha < 1 \quad (\textit{converge}) \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{per} \quad \alpha \leq 1 \quad (\textit{diverge}) \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{per} \quad \alpha > 1 \quad (\textit{converge}) \end{cases}}$$

L'interpretazione geometrica è la seguente: le funzioni del tipo $\dfrac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha < 1$, (come ad esempio $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$) "vanno all'infinito" lentamente per $x \to 0^+$, quindi il loro grafico è "vicino" all'asse verticale, e delimita una regione illimitata e tuttavia di area finita (in **R**osa nella prima figura).
Le stesse funzioni vanno lentamente a zero per $x \to +\infty$, e quindi il loro grafico è "meno vicino" all'asse orizzontale, e delimita una regione di area infinita.

Al contrario, le funzioni dello stesso tipo, ma con $\alpha > 1$ (come ad esempio $\dfrac{1}{x^2}$) "vanno a zero" velocemente per $x \to +\infty$; quindi il loro grafico è "vicino" all'asse orizzontale e delimita una regione illimitata ma di area finita (in **A**zzurro nella seconda figura).
Le stesse funzioni vanno velocemente all'infinito per $x \to 0^+$, e quindi il loro grafico è "meno vicino" all'asse verticale e delimita una regione di area infinita.





Esempio 10.18 Stabiliamo il comportamento dei seguenti integrali impropri.

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}\,dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $(0,2]$. Inoltre per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale improprio converge.

- $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}\, dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $[4,+\infty)$. Inoltre per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale improprio converge.

Esempio 10.19 Studiamo il comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{3x^3+x^2}\, dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $(0,+\infty)$ e non è limitata in un intorno destro di 0.
Per ogni $0 < x_0 < +\infty$ lo spezzamento $(0,+\infty) = (0,x_0] \cup [x_0,+\infty)$ ci porta a considerare singolarmente i due integrali impropri

$$\int_0^{x_0} f(x)\ dx \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Il secondo integrale è convergente, in quanto, per $x \to +\infty$, si ha $f(x) \sim \dfrac{1}{3x^2\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{1}{3x^{11/4}}.$

Invece,

$$\text{per } x \to 0^+ \text{ si ha } f(x) = \frac{(1+x)^{1/4}-1}{x^2(3x+1)} \sim \frac{x/4}{x^2} = \frac{1}{4x}$$

e quindi l'integrale improprio $\int_0^{x_0} f(x)\ dx$ diverge

In conclusione, l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{3x^3+x^2}\, dx$ non converge.

È utile osservare che la scelta del punto x_0 è totalmente ininfluente, ai fini della determinazione del comportamento dell'integrale assegnato. Questo comportamento dipende esclusivamente dai valori assunti da f in un intorno destro di $x=0$ e in un intorno di $+\infty$.

- Un'altra famiglia di funzioni "test" delle quali è noto il comportamento è:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\, dx \qquad \text{converge solo nei casi} \begin{cases} \alpha > 1,\ \beta \text{ qualunque} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{cases}$$

e diverge negli altri casi.

Esempio 10.20 Studiamo il comportamento, al variare di $a > 0$, di $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x+5}{x^a \log(1+x^2)}\, dx.$

Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{x+5}{x^a\log(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{2x^{a-1}\log x}$ e quindi l'integrale è convergente se e solo se $a > 2$.